Antilles remplacement 13 - **De Hubble à James Webb** - 5 points

Calculatrice autorisée - $50\,min$

Dès 1923, Hermann Oberth mentionne l'intérêt d'un télescope spatial. En effet, un télescope terrestre reçoit des radiations filtrées par l'atmosphère terrestre qui absorbe des radiations électromagnétiques dans le domaine de l'infrarouge notamment. Par ailleurs un télescope spatial n'est pas sensible aux turbulences atmosphériques.

Le télescope spatial Hubble, du nom de l'astronome américain Edwin Hubble, a été lancé en 1990. Celui-ci souffrait au départ d'un défaut de courbure du miroir, non détecté avant la mise en orbite, qui provoquait des images floues. Après modification grâce à une mission spatiale, Hubble put enfin fournir ses première images de l'Univers dans le domaine du spectre ultraviolet, visible et proche infrarouge. Le télescope Huble, d'une masse $m = 11$ tonnes, est positionné sur une « orbite basse » à une altitude quasi constante $h = 600\,km$ de la surface de la Terre.

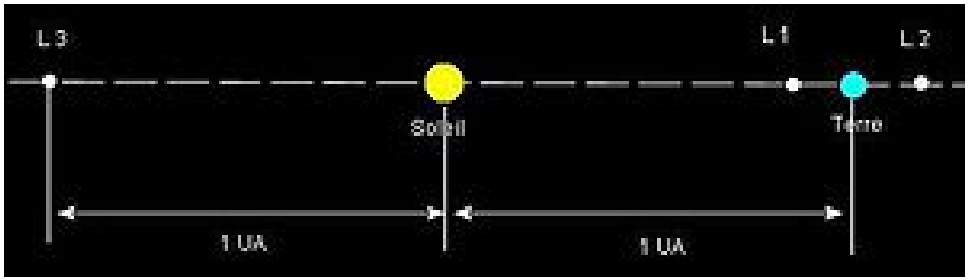
Le télescope spatial James Webb, du nom d'un administrateur de la NASA, doit succéder au télescope Hubble en 2018. Il sera lancé par une fusée Ariane 5. Le télescope spatial James Webb, d'une masse $6\,200\,kg$, sera en orbite à une distance proche de 1,5 millions de kilomères de la Terre en un point dénommé « point de Lagrange $L2$ » (voir documents 1 à 3).

D'après www.wikipedia.org, www.hubblesite.org et http://www.jwst.nasa.gov

Document 1 : Points de Lagrange

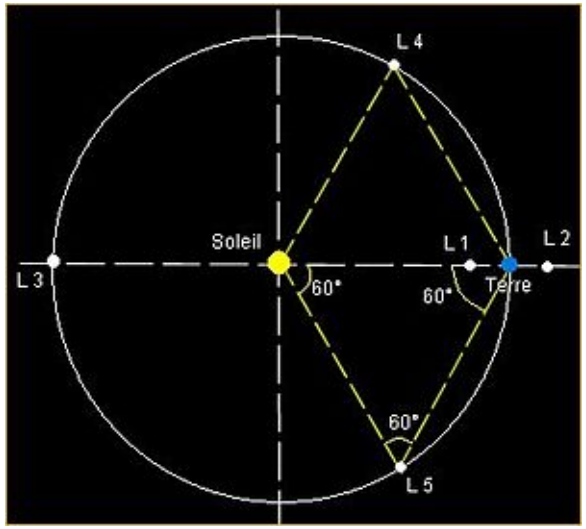
En mécanique céleste, il est un sujet qui a passionné de nombreux mathématiciens : c'est le problème dit « des trois corps ». Joseph-Louis Lagrange étudia le cas d'un petit corps, de masse négligeable, soumis à l'attraction de deux plus gros : le Soleil et, par exemple, une planète. Il découvrit qu'il existait des positions d'équilibre pour le petit corps.
Un point de Lagrange (il en existe 5, notés de $L1$ à $L5$) est une position de l'espace où les champs de gravité de deux corps très massifs en orbite l'un autour de l'autre fournissent exactement la force centripète requise pour que ce point de l'espace accompagne simultanément la rotation des deux corps.
Dans le cas où les deux corps sont en orbite circulaire, ces points représentent les endroits où un troisième corps de masse négligeable resterait immobile par rapport aux deux autres : il accompagnerait à la même vitesse angulaire leur rotation autour de leur centre de gravité commun sans que sa position par rapport à eux n'évolue. La sonde d'observation SoHO, déstinée à observer le Soleil, a par exemple été placée au point $L1$.

Document 2 : Position des points de Lagrange sur l'axe Soleil-Terre



Positions des points $L1$ à $L3$ sur l'axe Soleil-Terre

Document 3 : Positions des cinq points de Lagrange dans l'écliptique



Positions des 5 points de Lagrange

Antilles remplacement 13 - **De Hubble à James Webb** - 5 points

Données :

- constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}\,m^3.kg^{-1}.s^{-2}$;
- masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}\,kg$;
- masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}\,kg$;
- distance moyenne Soleil-Terre : $d = 149,6.10^6\,km$ équivaut à $1\,UA$ (unité astronomique) ;
- rayon de la Terre : $R_T = 6\,370\,km$;
- durée d'une année terrestre : $365,35$ jours.

Les deux parties sont indépendantes

1. **Première partie : étude de l'orbite du télescope spatial Hubble**

   On étudie le système {télescope spatial Hubble} dans le référentiel géocentrique en négligeant l'interaction gravitationnelle du Soleil avec le télescope.

   1.1. Quelle est la trajectoire du télescope Hubble dans ce référentiel ?

   1.2. A partir de la deuxième loi de Newton, montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du télescope Hubble est uniforme.

   1.3. Montrer que l'expression de la valeur de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique est : $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + h}}$.

   1.4. Etablir l'expression de sa période de révolution T en fonction de R_T, h et v.

   1.5. Rappeler la troisième loi de Képler.
   Montrer que dans le cas du télescope spatial Hubble on a la relation :
   $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$ où $r = R_T + h$ représente la distance entre le centre de la Terre et le télescope spatial.

   1.6. Calculer la période de révolution T du télescope spatial Hubble, exprimée en minutes.

2. **Deuxième partie : étude de la mise en orbite du télescope spatial James Webb**

   Le télescope spatial James Webb sera mis en orbite par le lanceur européen Ariane 5 depuis la base de lancement située à Kourou en Guyane. Dans cette partie on étudie tout d'abord le système {Ariane 5} (incluant tout son équipement y compris le télescope) dans le référentiel terreste que l'on suppose galiléen pendant la durée de l'étude. Initialement le système {Ariane 5} est situé sur sa base de lancement. Le repère d'espace choisi est un axe vertical Oz orienté vers le haut. L'origine O est initialement confondue avec le centre d'inertie de la fusée de sorte que
   $z(0) = z_0 = 0$.

   2.1. Lors de son décollage, la fusée Ariane 5 et son équipement possèdent une masse totale proche de $M = 780$ tonnes. La valeur F de la force de poussée générée par ses propulseurs est de l'ordre de $14,0.10^6\,N$.

   2.1.1. Déterminer la valeur P du poids de la fusée Ariane 5 au moment de son décollage. Donnée : $g = 9,8\,m.s^{-2}$ (intensité de la pesanteur).

   2.1.2. Déduire de la deuxième loi de Newton l'expression de la coordonnée A_z du vecteur accélération $\vec{a}$ du lanceur Ariane 5 au moment de son décollage en fonction de M, F et g.

   2.1.3. L'accélération reste constante si l'on peut négliger les forces de frottement fluide et si le champ de gravitation reste constant. On montre que l'altitude $z(t)$ du lanceur Ariane 5 est alors donnée par la relation :

   $$z(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{M} - g\right)t^2$$

   Calculer la valeur de l'altitude z du lanceur Ariane 5 au bout de $10\,s$ dans ces conditions.

   2.1.4. En réalite, l'altitude d'Ariane 5 est nettement plus faible au bout de $10\,s$. Proposer une explication énergétique.

On envisage à présent le cas où le télescope James Webb aura atteint le point de Lagrange $L2$.

2.2. Pourquoi le point $L2$ a-t-il été choisi pour l'orbite du télescope James Webb plutôt que le point $L1$, alors qu'il est envisageable de placer plusieurs satellites au même point de Lagrange ?