Antilles 1998 - **Satellites de Jupiter et troisième loi de Kepler** - ? points

Calculatrice autorisée - $?min$

Donnée : $G = 6,67.10^{-11}\ S.I.$

Données :

Principales caractéristiques orbitales et physiques des satellites de Jupiter				
Satellites de Jupiter	Io	Europe	Ganymède	Callisto
demi-grand axe de l'orbite (km)	422 000	671 000	1 070 000	1 880 000
période sidérale (jours)	1,769	3,551	7,155	16,69
excenticité	0	0	0,001	0,01
inclinaison	0	0	0,2	0,2
rayon (km)	1 816	1 563	2 638	2 416
masse ($10^{20}\ kg$)	892	487	1 490	1 075
densité	3,55	3,04	1,93	1,83
composition superficielle	S, SO_2	glace	glace	glace sale

On se propose, après l'avoir démontrée, de vérifier la troisième loi de Kepler en considérant parmi les 16 satellites de Jupiter, les 4 ci-dessus.

Ces 4 satellites ont, autour de Jupiter, des trajectoires quasi-trajectoires de rayon correspondant au demi-grand axe noté dans le tableau. On considérera dans la suite que ces trajectoires sont circulaires.

I.

1. Après avoir préciser le référentiel d'étude, et en admettant négligeable tout autre interaction que celle existant entre Jupiter et un de ses satellites, montrer que ceux-ci ont un mouvement uniforme.
2. Etablir l'expression de la période T de ces satellites en fonction de la constante de gravitation G, de la masse de Jupiter M_J et du rayin r de leurs trajectoires respectives.

II.

1. La troisième loi de Kepler exprime que le carré de la période est proportionnel au cube du rayon de l'orbite. Donner l'expression littérale du rapport $\frac{T^2}{r^3}$.
2. Vérifier numériquement que les mouvements des 4 satellites obéissent à cette loi.
3. En déduire la masse de Jupiter.

III.

Le système formé par Jupiter et un de ses satellites a été considéré comme isolé, l'énergie potentielle de ce système a pour expression :

$$E_p = -\frac{G\,M_J\,m_S}{r}$$ avec M_J masse de Jupiter et m_S celle du satellite.

1. Etablir que l'énergie mécanique du système est constante.
2. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de G, M_J, m_S et r.